Probabilités (lois discrètes)
(version chantier)

Marc SAGE

18 juin 2014

Table des matières

Ce terme de *probable* vient du latin *probabilis* utilisé par Cicéron pour traduire les termes d'*endoxa*, de *pistis* et d'*eikota* dans les *Topiques* d'Aristote, qui signifient respectivement *l'opinion*, la *croyance non fondée en raison* et la simple *vraisemblance*. il sert donc à désigner de manière confuse ce à quoi le rationalisme oppose le *savoir*, la *croyance fondée en raison*, et le *vrai*.

(Alain Séguy-Duclot, *La réalité physique*, ed hermann p105)

1 Un exo calcul concret pas trop dur

tire pile (proba p) ou face (proba q)–> on s'arête à pile au L-ième lancer (proba $q^{L-1}p$) –> tirer uniformément une suite de L chiffres dans $\{0,...,9\}$, d'où un décimal X.

$\Omega = \coprod_{\ell\geq 1}\left\{F^{\ell-1}\mathbf{P}\right\}\times\{0,1,...,9\}^{\ell}$

$\mathbf{P}\left(F^{\ell-1}\mathbf{P}\times\overrightarrow{c}\right) = q^{\ell-1}p\frac{1}{10^{\ell}}$ (vérfi : $\sum_{\ell,\overrightarrow{c}}\mathbf{P}=1$)

Tirer un nombre $\frac{k}{10^{\ell\geq 1}}$ où $10 \not| k$ revient à tirer une longueur $\ell+\varepsilon$ puis à tirer les ℓ chiffres de k suivis de ε chiffres 0, d'où

$$\mathbf{P}\left(X=\frac{k}{10^{\ell}}\right) = \sum_{\varepsilon\in\mathbf{N}} q^{\ell+\varepsilon-1}p\times\frac{1}{10^{\ell+\varepsilon}} = \frac{p}{q}\left(\frac{q}{10}\right)^{\ell}\frac{1}{1-\frac{q}{10}} = \left(\frac{q}{10}\right)^{\ell-1}\frac{p}{10-q}.$$

Bien regarder à part le cas de 0 (pour lequel il n'y a pas de tel k) : revient à tirer $0,1$ où l'on remplace le 1 par un 0, d'où

$$\mathbf{P}(X=0) = \mathbf{P}(X=0,1) = \frac{p}{10-q}.$$

On en déduit l'espérance

$$\mathbf{E} = \sum_{\substack{\ell\geq 1\\ 1\leq k<10^{\ell}\\ 10\not| k}}\frac{k}{10^{\ell}}\mathbf{P}\left(X=\frac{k}{10^{\ell}}\right) = \sum_{\substack{\ell\geq 1\\ 1\leq k<10^{\ell}\\ 10\not| k}}\frac{k}{10^{\ell}}\left(\frac{q}{10}\right)^{\ell-1}\frac{p}{10-q} = \frac{p}{10-q}\sum_{\ell\geq 1}\frac{q^{\ell-1}}{10^{2\ell-1}}\sum_{\substack{1\leq k<10^{\ell}\\ 10\not| k}}k.$$

Or la dernière somme vaut

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leq k<10^{\ell}\\ 10\not| k}}k &= \sum_{1\leq k<10^{\ell}}k - \sum_{\substack{k=10h\\ 1\leq h<10^{\ell-1}}}(10h) = 10^{\ell}\frac{10^{\ell}-1}{2} - 10\cdot 10^{\ell-1}\frac{10^{\ell-1}-1}{2}\\ &= \frac{10^{\ell}}{2}\left(\left(10^{\ell}-1\right)-10^{\ell-1}-1\right) = \frac{10^{\ell}}{2}\left(10^{\ell}-10^{\ell-1}\right)\\ &= \frac{10^{\ell}}{2}10^{\ell-1}(10-1) = \frac{9}{2}10^{2\ell-1},\end{aligned}$$

d'où en réinjectant

$$\mathbf{E} = \frac{p}{10-q}\sum_{\ell\geq 1}\frac{q^{\ell-1}}{10^{2\ell-1}}\left(\frac{9}{2}10^{2\ell-1}\right) = \frac{9}{2}\frac{p}{10-q}\sum_{\ell\geq 1}q^{\ell-1} = \frac{9}{2}\frac{p}{9+p}\frac{1}{1-q} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{p}{9}}.$$

À longueur ℓ fixée, la première moitié des décimaux forme $\frac{1}{10^{\ell}}[0,499...9]$ et la seconde $\frac{1}{10^{\ell}}[500...000,99...9]$: par rapport à $\frac{1}{2}$, la première pèse plus que la seconde. De fait, $\mathbf{E}\in\frac{1}{2}\left]\frac{1}{1+\frac{1}{9}},\frac{1}{1+\frac{0}{9}}\right[= \left]\frac{9}{20},\frac{1}{2}\right[$.

Soit $a\in[0,1[$, mettons $a=\sum_{\ell\geq 1}\frac{c_{\ell}}{10^{\ell}}$. Notons $a_{\ell} := \frac{\lfloor 10^{\ell}a\rfloor}{10^{\ell}}$ sa troncature à ℓ décimales (observer $a_0=0$ et $a_i-a_{i-1}=\frac{c_i}{10^i}$).

Soit $\ell\in\mathbf{N}^*$. Choisir un décimal $\leq a$ à ℓ décimales revient (d'après la comparaison lexicographique) à choisir un entier $\leq c_1c_2...c_{\ell} = \lfloor 10^{\ell}a\rfloor$: il y en a $\lfloor 10^{\ell}a\rfloor+1$, à diviser par les 10^{ℓ} décimaux possibles, d'où

$$\mathbf{P}_{L=\ell}(X\leq a) = \frac{\lfloor 10^{\ell}a\rfloor+1}{10^{\ell}}.$$

On en déduit l'image de a par la fonction de répartition :

$$F(a) = \mathbf{P}(X \leq a) = \sum_{\ell \geq 1} \mathbf{P}(L = \ell) \mathbf{P}_{L=\ell}(X \leq a) = \sum_{\ell \geq 1} q^{\ell-1} p \, \frac{\lfloor 10^\ell a \rfloor + 1}{10^\ell} = p \sum_{\ell \geq 1} a_\ell q^{\ell-1} + \underbrace{\frac{p}{10} \sum_{\ell \geq 1} \left(\frac{q}{10}\right)^{\ell-1}}_{=\mathbf{P}(X=0)=\frac{p}{10-q}}.$$

Or la première somme se télescope en

$$(1-q) \sum_{\ell \geq 1} a_\ell q^{\ell-1} = \sum_{k \geq 0} a_{k+1} q^k - \sum_{\ell \geq 1} a_\ell q^\ell = \underbrace{a_1}_{=a_1 - a_0} + \sum_{k \geq 1} \underbrace{(a_{k+1} - a_k)}_{\frac{c_{k+1}}{10^{k+1}}} q^k = \sum_{k \geq 0} c_{k+1} \frac{q^k}{10^{k+1}} = \frac{1}{q} \sum_{\ell \geq 1} c_\ell \left(\frac{q}{10}\right)^\ell,$$

d'où

$$F\left(\sum_{\ell \geq 1} \frac{c_\ell}{10^\ell}\right) = F(0) + \frac{1}{q} \sum_{\ell \geq 1} \frac{c_\ell}{(10/q)^\ell} \text{ avec } F(0) = \frac{1}{1 + \frac{p}{9}}.$$